

High-order methods in fully general-relativistic hydrodynamics and magnetohydrodynamics

Deutschsprachige zweiseitige Zusammenfassung

Sven Köppel

Schwarze Löcher und Gravitationswellen gehören zu den faszinierenden Vorhersagen der allgemeinen Relativitätstheorie. Schwarze Löcher gibt es auf fast jeder Längenskala und seit einigen Jahren gibt es mehr und mehr Möglichkeiten, sie zu (ver)messen. Das Laser-Interferometer-Gravitationswellen-Observatorium (LIGO) konnte 2016 zum ersten mal Gravitationswellen direkt beobachten, die durch den Kollaps zweier stellarer schwarzer Löcher entstanden. Kurze Zeit später wurden die Gravitationswellen von der Verschmelzung zweier Neutronensterne gemessen. Das Signal bekam den Namen GW170817. Neutronensterne gehören zu den kompaktesten astrophysikalischen Objekten, mit einer Ausdehnung von wenigen Kilometern und einer mit der Sonne vergleichbaren Masse. Die zentrale Massendichte in Neutronensternen erreicht ein Vielfaches der nuklearen Sättigungsdichte. Damit sind Neutronensterne ein Ort, in dem sich extrem heiße und kompakte Materie natürlicherweise vorfindet, und dank der neuen Ära der Multimessenger-Astronomie (Radiowellen sowie Gravitationswellen) können erstmals präzise Aussagen über die Beschaffenheit dieser Sterne gemacht werden.

Eine zentrale Rolle spielt dabei die computerbasierte Lösung von Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie (ART). Die numerische Relativitätstheorie ist ein junges Feld, erst vor 15 Jahren wurde mittels der Punktierungsmethode der Durchbruch beim Zweikörperproblem der ART erlangt. Seitdem gab es gewaltige Fortschritte, die unter anderem stetig verbesserter Formulierungen der ART als zur numerischen Zeitentwicklung geeignetes Anfangs-Randwertproblem zuzuschreiben sind. Darüberhinaus profitiert die numerische Relativitätstheorie von zunehmend besser konvergierenden numerischen Methoden, welche allgemein unter dem engl. Stichwort “high order methods” zusammengefasst werden.

Im Rahmen dieser Dissertation wurden die neuartigen diskontinuierlichen Galerkin-Verfahren in einem ebenfalls neuartigen adaptiven Gitterverfeinerungscode auf astrophysikalische Probleme angewandt. Dabei handelt es sich um generische Verfahren, um gekoppelte Systeme von hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen (PDG) zu lösen. Um nicht an Unstetigkeitsstellen, etwa in der Materie-Verteilung, oder Singularitäten der Raumzeit, zu begegnen, fällt das Schema als Prädiktor-Korrektor-Verfahren auf ein klassisches robustes Finite Volumen-Verfahren zurück.

Ein weiteres Projekt im Rahmen dieser Arbeit ist die Herleitung einer neuen Formulierung der Einsteingleichungen in dem Cauchy-Split, die nur Ableitungen erster Ordnung in

Zeit *und* Raum aufweist. Es konnte gezeigt werden, dass das System aus 59 gekoppelten nichtlinearen PDGs streng hyperbolisch ist und damit für eine numerische Zeitentwicklung sehr gut geeignet. Zur Demonstration der Korrektheit der Formulierung sowie ihrer Lösbarkeit mit den dargestellten numerischen Schemata werden einige Standardtests der numerischen Relativitätstheorie erfolgreich demonstriert.

Zur Beschreibung der Materie in astrophysikalischen Raumzeiten wurden in einem dritten Projekt die Gleichungen der allgemein relativistischen Magnetohydrodynamik (engl. GRMHD, für “general relativistic magnetohydrodynamics”) an die benötigte Formulierung angepasst. Mit den Gleichungen der GRMHD lassen sich eine Vielzahl astrophysikalischer Phänomene beschreiben, etwa Jets, Pulsare und Gammastrahlenblitze. Ebenfalls in Standard-Benchmarks wurde die Formulierung auf stationären gekrümmten Hintergründeräumen (Cowling-Näherung) getestet.

Ein viertes Projekt ist im weitesten Sinne eine Anwendung der vorangegangenen Techniken, also der numerischen Zeitintegration des gekoppelten Einstein-Euler-Systems. Dabei wurde das Szenario eines “verzögerten Kollapses” bei der Vereinigung zweier Neutronensterne untersucht. Es wurden quantitative Kriterien entwickelt, um einen sofortigen Kollaps zu einem schwarzen Loch von der Entstehung eines metastabilen hypermassiven Neutronensternes zu unterscheiden. Dazu wurde eine Parameterstudie durchgeführt, bei der für eine Vielzahl an realistischen nuklearen Zustandsgleichungen eine Menge an Anfangswertprobleme gebildet wurden, die sich durch die Masse ihrer Konstituenten unterscheiden. Für die Untersuchung stellte sich heraus, dass die dynamische Eichfixierung dank ihrer Eigenschaft, die Koordinaten aus dem Gravitationspotential herauszutreiben, am besten dafür geeignet ist, den Zeitpunkt der Verschmelzung und des Kollapses zu definieren. Als Ergebnis konnte ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen Zustandsgleichungen und Überlebenszeit hergestellt werden. Mithilfe von Messungen von GW170817 konnte ferner eine die minimal mögliche Ausdehnung eines Neutronensternes ermittelt werden, der Radius beträgt $R = 9.74(\pm 0.1)\text{km}$.

Als letztes Projekt ist dieser Monographie ein Projekt aus dem Bereich der Quantengravitation beigelegt. Es handelt sich dabei um die Modellierung von mikro-schwarzen Löchern mittels einer stringtheoretisch motivierten impulsabhängigen Modifikation der Heisenbergschen Unschärferelation. Die neuen Kommutatorrelationen sorgen für exakte Impulsoperatoren auf Kosten einer minimalen Länge im Ortsraum. Im Rahmen der Dissertation wurden mögliche Erweiterungen der Theorie auf große Extradimensionen untersucht. Zwei Erweiterungen stechen dabei heraus: Zum einen eine, welche in $(4 + 1)$ -dimensionaler Raumzeit eine konische Singularität aufweist. Dies ist die erste exakte Lösung einer Raumzeit, welche auf kurzen Skalen wie ein gravitativer Monopol aussieht und auf großen Skalen wie ein schwarzes Loch. Eine weitere, modifizierte Unschärferelation wiederum reproduziert in jeder Dimension die gleiche Impulsraum-Regularisierung, verfügt darüber hinaus aber über einen neuen komplexeren thermodynamischen Zustandsraum- Dabei handelt es sich um das Phänomen, dass das schwarze Loch kurz vor seiner Verdampfung auf der Planck-Skala Temperaturosillationen aufweist, welche mit wiederholten Phasenübergängen zwischen negativer und positiver Wärmekapazität einhergehen. Die damit verbundene stetig veränderte Luminosität verleitet zur Prägung des Begriffes “Leuchtturm-Effekt”.